

Title	柳原氏ニ紙上デオ答へ： 其他ニ・三分割問題ヲ中心ニシテ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 139 p.131-p.138
Issue Date	1937-09-07
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74542">https://doi.org/10.18910/74542</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

617. 柳原氏 = 紙上デオ答へ.

其他二・三分割問題ヲ中心 = シテ

寺 阪 英 孝 (阪大)

1. 本紙第136号デ柳原氏ノ「一ツノ平面圖形ヲ、コレト合同ナ圖形デ包囲スル問題」ヲ拝読シマシタラ、ズット以前ノ本紙第17号デ當問題 = ツキオ話ノアツタコトヲ知ツタノデ、ソレヲ拝見シマシタ所、ソノトキ早速御返事申上カネバナラヌ様ナ事柄デシタ。

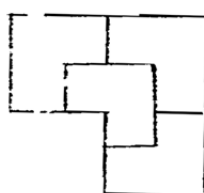
迷憎當時ハマダ、コチラニ居リマセシタノデ氣が付リズ其ノマユニナツテ居リマシタ次第デ、今トナツテハモウ

オ答ノ必要ガナイヨウデモアリマスガ、コレニ関聯シテ諸賢ニ御教示ヲ仰ギタイコトモアリマスノデ、紙面ヲ借りルコトニシマシタ。

2. 柳原氏ノオ尋ネハ「 $\square$ ニ合同ナルニツノ平面單一閉曲線  $A, B$  ヲ以テ、コレト合同ナ図形  $C$  ヲ (隙間ナク) 完全ニ包圍スルコトが出来ルカ」ト云フマウナコトガ或ルトキ東京大ノ學生ノ人ノ間デ問題トナツテ居タガ、コレハ誰ガ云ヒ出シタノカ、又ソノ來歴如何」ト云フ意味ノコトデシタガ、實ハ小生ガ斯ナ妙ナコトヲ云ヒ始メタノデシタ。1932年頃ダツタと思ヒマスガ、或ル時「 $\square$  (A) ナル圖形ヲ合同ナル四



(A)



(B)

個ノ図形ニ分割セヨ」ト云フ、ヨクアル考ヘ物ノ底ハ (B) デアルガ、此ノ解ハ一意的デアルカ」ト

云フ數學者ラシイ疑問ガ話題ニ上ツタコトガアリマシタ。

此ノ種ノ問題ニ興味ヲ有ツテ居タノデ色々工夫ラシテキル中、フト

*K. Reinhardt: über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. Sitzungsber.*

*Akad. Wiss. Berlin (1928)*

ヲ見付ケタノデス。

本論文ハ Hilbert ノ有名ナ平面ノ合同分割問題ヲ解ケ手掛リトシテ、 $\square$ ニ分割ニ要スル合同図形ハ、或ル假定ノ

下ニ、線分又ハ円弧カラナル多角形ダケ考ヘレバ宜シイ  
ト云フ主定理ヲ稍々複雑デスガ面白い方法ヲ取扱ツテキル  
ノデ、コレハ良イト早速+ガラ前ノ問題ニ Reinhardt ノ  
方法ヲ應用シヨウトシア先ツ手初メニ考ヘモシ証明モ試ミタ  
ノガ柳原氏ノ表現ヲ借用シマスト「 $A, B$ ガ重ナラナイ  
デ或ル平面ノ一部  $D$ ヲ包囲スルトキ」 $D$ ガ  $A$ ト合同デア  
ルコトハ不可能デア  
ル、 $D$ ノ中ニ  $A$ ト合同ナ図形ヲ容  
レルコトハ（隙間ガアツテモヨイナラ簡便ニ）出來ル」ト云  
フノデシタ。

當時數物ノ例會デモ話シタコトガアルノデスガ、其ノ  
後証明ガ満足ニ行カヌノデ打捨テテオキマシタ。ソレデス  
カラ Reinhardt ノ問題ガ程経テ Jahresberichte紙  
上ニ出タトキハ、サモアリナント點頭イタト全時ニ、一体同  
誌ハ通常解答付ノ問題ヲ採用スル筈デスカラ、流石ハ合同分  
割専門ノ Reinhardt ダケアツテ彼ノ難解ナ問題ガ而モ  
拡張サレタ形デ解ケルノダナト私カニ畏レ、敬ツタ訳デスガ  
ソレニシテモ誰ガ外ニ解ク人ガアルガラウカト解答ノ出ルノ  
ヲ鶴首シテ待ツテキマシタトコロ、青天ノ霹靂、Vader-  
berg トイフ人ニヨツテ柳原氏ノ御紹介サレタマウ一ノ  
誤ガ指摘サレタノデシタ。

然モソノ解答ノ明快サ、實ニ意外デス。出來上ツタ所ヲ  
見レバ、彼ガ先ヅ証明ヲ試ミヨウトシア図形ノ曲線ニ目ジ  
リシヲ附ケツ、次々ニ modify シ遂ニ反対ノ結果ニ仕上ツタイ  
キサツが見エルマウデスガ、其処迄ニ行ク辛抱強サニハタジ

圧倒サレル外アリマセン。

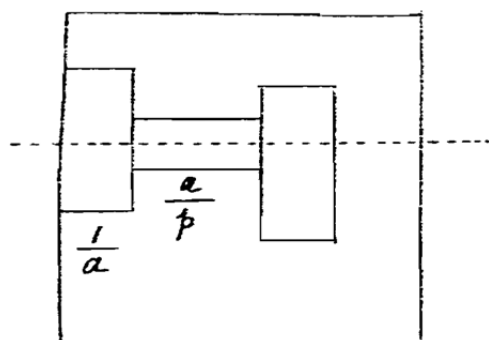
3. 柳原氏へのオ答トモツカスモノハコレデ終リマスが  
尚序=二三オ饒舌ヲイタシマス。

所謂 *dissection* 分割ノ問題ハ通俗雜誌ノ考へ物楠=屢々見カケマスが、解ノ *unicity* ハ一般ニ融レラレズ又難カシイト思ヒマス。例ヘバ極ク簡單ナ四形ヲトツテモ、次ノ様ナハ如何デセウ。

1°. 正三角形ハ  $n^2$ ,  $2n^2$  又ハ  $3n^2$  個ノ合同四形ニハ夫々分割出来ルが、ソノ外ノ個数ニハ分割出来ナイ(?)

2°. 正方形ヲ奇数個ノ合同四形ニ分割スルニハ、矩形ニ分割スルヨリ外ナイ。ソノ中特ニ素数個ニ分割スル法ハ唯一ツヨリ外ナイ(?)

正方形ヲ素数個  $p$  ( $\neq 2$ ) ノ“矩形”ニ分割スル法が唯一デアルコトハ初等的ニ判リマス。今正方形ノ辺長ヲ1トスレバ矩形ノ面積ハ  $\frac{1}{p}$ 。由ツテソノ一辺ヲ  $\frac{1}{a}$  トスレバ他ノ辺ハ  $\frac{a}{p}$  トナル。今正方形が矩形



デウメラレテ居ルトシ、コレヲ正方形ノ辺ニ平行ナ一直線ヲ截ツタトキ、 $\frac{1}{a}$  ノ向きノガ  $m$  個、 $\frac{a}{p}$  ノ向きノガ  $n$  個アツタトスレバ次式が成立スル。

$$(1) \quad \frac{m}{a} + \frac{na}{p} = 1 \quad (1 \text{ ハ正方形ノ辺長})$$

ユコニ

$$(2) \quad 0 \leq m \leq a < p, \quad 0 \leq n \leq p$$

ヨツテ

$$(3) \quad na^2 - pa + mp = 0$$

正方形ノ辺ニ平行ナ今一ツノ直線ヲ截ツタ時同様ニ  $m'$  個,  
 $n'$  個ナラバ, 同ジク

$$n'a^2 - pa + m'p = 0$$

今  $n > n'$  ト假定シテユノ式ヲ (3) カラ引ケバ

$$(4) \quad (n - n')a^2 + (m - m')p = 0$$

(i)  $a$  が無理数ナラバ (3) ニヨリ  $a^2$  モ無理数。

此ノ時ハ (4) カラ  $n = n'$  トナリ (1) ハ  $m, n$  ニツキ一通リ  
シカ解ガナイコトナルカラ, 正方形ノ辺ニ平行ナ, ドノ直  
線上ニモ矩形ガ縦横ニ夫々同数ガケ並ンデキルコトナリ,  
コレガ事實不可能ナコトハ図形ノ上カラ容易ニ判ル。

(ii)  $a$  が有理数ヲ  $a = \frac{\lambda}{\mu}$  ( $\lambda, \mu$  整. 正. 既約)

ナラバ (4) ヨリ

$$(5) \quad (n - n')\lambda^2 + (m - m')p\mu^2 = 0$$

$n \leq p, n' \leq p$  ナル故  $(\lambda, p) = 1$  ノ時ニハ  $n = p,$   
 $n' = 0$  ナラバナラズ。コレヲ (1) ニ入レレバ  $a = 1$ 。  
由ツテ矩形ノ辺  $(\frac{1}{a}, \frac{a}{p})$  ハ  $(1, \frac{1}{p})$  ナラバアル。又  
 $(\lambda, p) > 1$  ノ時ニハ, 即チ  $\lambda$  ガ  $p$  ヲ因数ニ有ツトキニハ  
(5) ヲ  $p$  ガ割レバ

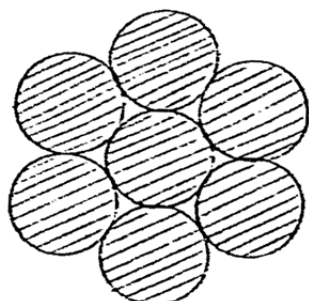
$$(n - n')\lambda'^2 p + (m - m')\mu^2 = 0 \quad (\lambda = \lambda'p)$$

ノ形トナリ  $(\mu, p) = 1$  ナル故、前ト同様ニ  $m = p, m' = 0$

が出、(1) = 入レルト  $\alpha = p$  ダカラ、由ツテ辺が  $(\frac{1}{p}, 1)$  ナル 矩形が得ラレル。イザレ = シテモ矩形ニ分割スル法ハ一通リシカナイ。以上

尚一般ノ場合、図形トカ分割トカ言葉が曖昧デスガ、多角形トカ面分トカニ制限シテ議論スレバハツキリシマス。

4. 尚元ノ問題ヲ考ヘテキタ頃、次ノヤウナコトヲ考ヘ出シタコトガアリマス。ソレハ“合同図形ヲ6個用キレバ、



同形ノ圖形ヲ常ニ包囲スルコトが出来ル”

ト云フノデス。

(コレニ関シテハ森本清吾氏が昭和七年  
頃ノ物理學校雑誌ニ書イテ居ラレマス)

サテ此ノ6ナル数デスが近頃

Lichtenbaum: Sur un théorème de la  
topologie du plan. Mathématiques Sbor-  
nik T. 1 (43): 6. (1936)

ヲ見マシタラ次ノ定理が載ツテ居ルノデス。

“平面  $E$  ヲ開集合系  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  デ被覆シタトキ、即チ  $E = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$  ノトキ、平面上ノ任意ノ正方形ト素デナイ  $F_i$  ノ数が常ニ有限個ナラバ、コノ被覆ヲ正則デアルト云フ。モシ此ノトキ各  $F_i$  ノ直径が更ニ有界ナラバ少クモ6個ノ  $F_i$  ト夫々素デナイヤウナ  $F_j$  ガ少クモ一ツ存在スル。”

ト云フノ事實ハ斯ウイノ  $F_n$  ハ無限ニ存在スルノデスガ、  
例ヘバ平面ヲ正六角形ニ分割スルト、ドノ六角形ニツイテモ  
コレト共通点ヲ有ツモノハ6個デス。上ニ云ツタ包囲問題モ  
*Lichtenbaum*ノ定理モ、図形ノ周囲ニ関スルコトデ、6  
ト云フ数ハ偶然ノ一致デハナイ様デス。

所デ *Lichtenbaum*ノ定理ハ *der zweite Pflaster-  
satz* トモ稱スベキモノデセウガ、証明ニ9頁ヲ費シテキ  
ル所ヲ見ルト少々長イヨウデスシ、而モ當然  $n$  次空間ニ拡  
張サルベキ性質ノモノデアルニ係ラズ、平面以外ニハ著者ハ  
触レテキマセンカラ、色々ノ意味ヲ手ヲ附ケル余地ノアル問  
題ガト思ヒマス。

5. 安部道雄氏が先年マツテ居ラレタ "矩形ヲ悉ク大イ  
サノ異ナル正方形ヲ隙間ナクウメル法" —— 矩形 デナクテ  
正方形 ガト赤穴問題ハ解ケテオナイノデ、其処ニ興味ガア  
ル訳デスガ —— コレナドモ、*Schoenflies-Stehn*ノ  
*Analytische geometrie*ノ *Anhang*ニ出テキル問  
題同様 *topological*ノ関係ガ入ル訳デスシ、又 *Lichten-  
baum*ノ定理ノヨウニ分割問題ニモ何物カヲ共ヘヨウトシ  
テキルノモアリマスガ、直接分割問題ノ位相幾何學化トモ解  
釈出来ルノハ

*R. L. Wilder: The strong symmetrical cut  
sets of closed euclidean  $n$ -space Fund.  
Math. 27(1936)*

デ、良イ *model* ガト思ヒマス。



色々混雑シマシタガ、以上ノコトデ何カ御氣付ノコトガ  
アリマシタラ紙上デ御啓示願ヒタイト存シマス。